

## Technische Optik 09

1 von 30

Prof. Dr. Ulrich Sowada  
Institut für Mechatronik  
Fachhochschule Kiel

1 Lichtstrahlen	2 Lichtwellen	3 Linsen	4 Lichtmessung	5 Lichttechnik
3.1 Brechung	3.2 Paraxial	3.3 Meridional	3.4 Achromat	3.5 Zweilinsige Systeme



Alle Probleme scheinen gelöst:

Wir können, sobald die Brennweite einer dünnen oder dicken Linse und die Lage der Hauptebenen bekannt sind, bei bekannter Lage des Objekts mit Hilfe der Abbildungsgleichung berechnen, wo das Bild entsteht und wie groß es ist.

Es bleiben einige wichtige Fragen:

1. Wie scharf ist der Bildpunkt, wenn der Objektpunkt unendlich scharf ist?
2. Wie bekommen wir die Lage der Hauptebenen?



Zur Beantwortung dieser beiden Fragen müssen wir die Brechung des Lichtstrahls an jeder der optischen Oberflächen (bei einer Linse: zwei; bei einem Linsensystem: viele) betrachten. Dieses tun wir im Rahmen einer Näherung, der paraxialen Näherung. Die entstehenden Informationen sind also nicht unendlich genau!

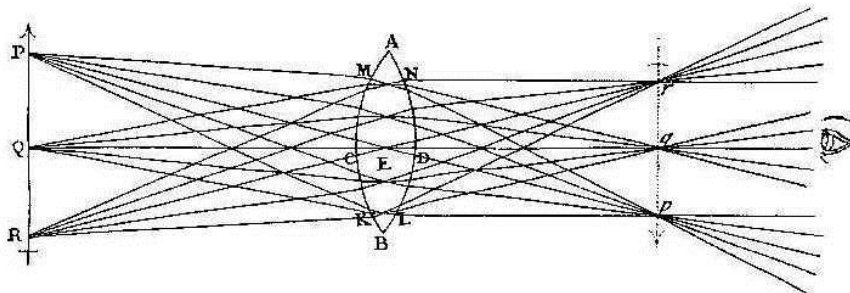
## Technische Optik 09

2 von 30

Prof. Dr. Ulrich Sowada  
Institut für Mechatronik  
Fachhochschule Kiel

1 Lichtstrahlen	2 Lichtwellen	3 Linsen	4 Lichtmessung	5 Lichttechnik
3.1 Brechung	3.2 Paraxial	3.3 Meridional	3.4 Achromat	3.5 Zweilinsige Systeme

Die Erkenntnis zweifacher Brechung beim Durchgang durch eine Linse ist nicht neu. In Newtons Buch "Opticks" von 1704 ist bezüglich „Abbildung“ folgendes Bild gezeigt:



Literatur: Sir Isaac Newton "Opticks" (based on the 4th edition London 1730, Dover Publications 1979)

Wir erkennen die Objektpunkte P, Q und R. In der Linse (A-B) werden Strahlen zweimal gebrochen und nach p, q und r gelenkt, wo das Bild beobachtet werden kann.

Im Bildpunkt werden für jeden der drei Objektpunkte P, Q und R die einzelnen Strahlen, die auf verschiedenen Wegen durch die Linse gehen, wieder vereinigt; dort entstehen die Bildpunkte p, q und r.

## Technische Optik 09

3 von 30

Prof. Dr. Ulrich Sowada  
Institut für Mechatronik  
Fachhochschule Kiel

1 Lichtstrahlen	2 Lichtwellen	3 Linsen	4 Lichtmessung	5 Lichttechnik
3.1 Brechung	3.2 Paraxial	3.3 Meridional	3.4 Achromat	3.5 Zweilinsige Systeme

Für kleine Winkel gibt es eine für die Praxis wichtige Vereinfachung.-  
Betrachten wir eine Tabelle mit kleinen Werten für die Winkel  $\epsilon$  :

$\epsilon$ in Grad	0,1	0,2	0,5	1,0
$\epsilon$ in rad	0,001745	0,003491	0,008727	0,017453
$\sin(\epsilon)$	0,001745	0,003491	0,008727	0,017452

**Erkenntnis:** Werden die Winkel in rad angegeben, sind bei kleinen Winkeln ihre Werte und die Werte der Sinusfunktion gleich groß!

Dieses ist die Grundlage der paraxialen Näherung. Für diejenigen Fälle der Brechung, bei denen die vorkommenden Winkel (in rad) sehr klein sind, macht man durch Gleichsetzung von Winkel und Sinus dieses Winkels nur einen kleinen Fehler.

Snelliussches  
Brechungsgesetz (exakt):

$$n * \sin(\epsilon) = n' * \sin(\epsilon')$$

Paraxiales Brechungsgesetz  
(Näherung):

$$n * \epsilon = n' * \epsilon'$$

## Technische Optik 09

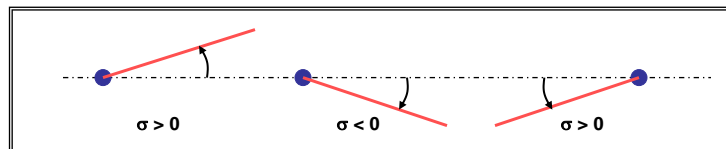
4 von 30

Prof. Dr. Ulrich Sowada  
Institut für Mechatronik  
Fachhochschule Kiel

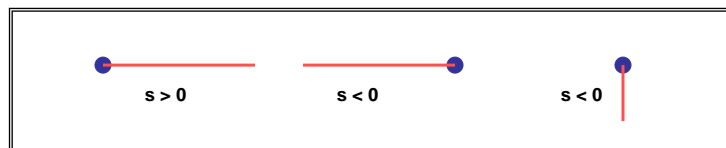
1 Lichtstrahlen	2 Lichtwellen	3 Linsen	4 Lichtmessung	5 Lichttechnik
3.1 Brechung	3.2 Paraxial	3.3 Meridional	3.4 Achromat	3.5 Zweilinsige Systeme

Bei Durchrechnungen von Strahlen durch ein optisches System hat man sich auf diese Vorzeichen-Konventionen geeinigt:

- 1.) Ein Winkel  $\sigma$  zählt positiv, wenn die Bezugsgerade in positiver Richtung (d. i. gegen den Uhrzeiger) gedreht werden muss, um zum Strahl zu kommen.



- 2.) Eine Gerade  $s$  hat eine positive Länge, wenn sie vom Bezugspunkt aus nach rechts oder nach oben gezählt wird.



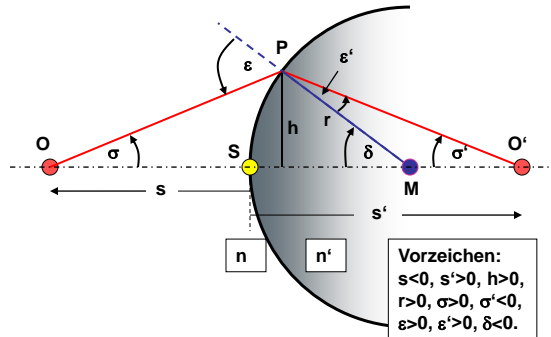
## Technische Optik 09

5 von 30

Prof. Dr. Ulrich Sowada  
Institut für Mechatronik  
Fachhochschule Kiel

1 Lichtstrahlen	2 Lichtwellen	3 Linsen	4 Lichtmessung	5 Lichttechnik
3.1 Brechung	3.2 Paraxial	3.3 Meridional	3.4 Achromat	3.5 Zweilinsige Systeme

Zur Berechnung von Brennweite und der Lage der beiden Hauptebenen untersuchen wir zunächst die Strahlablendung an einer sphärischen Oberfläche: Radius  $r$ , Mittelpunkt bei  $M$ . Die Größen werden in der paraxialen Näherung ausgedrückt.



$$\left. \begin{aligned} \sigma &= -\frac{h}{s} \\ \sigma' &= -\frac{h}{s'} \\ \delta &= -\frac{h}{r} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \epsilon &= \sigma - \delta \\ \epsilon' &= \sigma' - \delta \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} n * \epsilon &= n' * \epsilon' \\ n * (\sigma - \delta) &= n' * (\sigma' - \delta) \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} -\frac{n * h}{s} + \frac{n * h}{r} &= -\frac{n' * h}{s'} + \frac{n' * h}{r} \end{aligned}$$

Wir kürzen  $h$  heraus ...

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{r}$$

... und erhalten die paraxiale Schnittweitengleichung:

## Technische Optik 09

6 von 30

Prof. Dr. Ulrich Sowada  
Institut für Mechatronik  
Fachhochschule Kiel

1 Lichtstrahlen	2 Lichtwellen	3 Linsen	4 Lichtmessung	5 Lichttechnik
3.1 Brechung	3.2 Paraxial	3.3 Meridional	3.4 Achromat	3.5 Zweilinsige Systeme

Folgerungen aus der paraxialen Schnittweitengleichung:

1.) Erster Grenzfall: Parallel einfallende Strahlen

$$s \rightarrow -\infty$$

$$s' = f'$$

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{r} \rightarrow f' = r * \frac{n'}{n' - n}$$

2.) Zweiter Grenzfall: Parallele Strahlen nach rechts

$$s' \rightarrow \infty$$

$$s = f$$

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{r} \rightarrow f = -r * \frac{n}{n' - n}$$

Die beiden Brennweiten einer optischen Oberfläche (nach links und nach rechts) unterscheiden sich nicht nur im Vorzeichen, sondern auch in der Größe, wenn die Brechzahlen links und rechts ( $n, n'$ ) verschieden sind. Das ist wichtig in der Augenoptik und in der Unterwasser-Fotografie, wenn links und rechts verschiedene optische Medien existieren.

## Technische Optik 09

7 von 30

Prof. Dr. Ulrich Sowada  
Institut für Mechatronik  
Fachhochschule Kiel

1 Lichtstrahlen	2 Lichtwellen	3 Linsen	4 Lichtmessung	5 Lichttechnik
3.1 Brechung	3.2 Paraxial	3.3 Meridional	3.4 Achromat	3.5 Zweilinsige Systeme

Zur Strahldurchrechnung einer Oberfläche müssen wir zwei Gleichungen haben: Brechungs- und Transfergleichung. Wir wenden die paraxiale Schnittweitengleichung an, um die geänderte Ausbreitungsrichtung nach der Brechung zu bestimmen; dazu multiplizieren wir sie mit dem Achsabstand h:

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{r} \quad \rightarrow \quad n' \cdot \frac{h}{s'} - n \cdot \frac{h}{s} = (n' - n) \cdot \frac{h}{r} \quad \rightarrow \quad -n' \cdot \sigma' + n \cdot \sigma = h \cdot D$$

$$n' \cdot \sigma' = n \cdot \sigma + h \cdot (-D)$$

Brechungsgleichung

Brechkraft der Oberfläche:  $D = \frac{n' - n}{r}$

Bei der Ausbreitung von einer Oberfläche zur nächsten (Abstand d) ändert sich der Winkel nicht, aber der Achsabstand h:

$$h_2 = h_1 + \sigma \cdot d$$

Transfergleichung

## Technische Optik 09

8 von 30

Prof. Dr. Ulrich Sowada  
Institut für Mechatronik  
Fachhochschule Kiel

1 Lichtstrahlen	2 Lichtwellen	3 Linsen	4 Lichtmessung	5 Lichttechnik
3.1 Brechung	3.2 Paraxial	3.3 Meridional	3.4 Achromat	3.5 Zweilinsige Systeme

**Beispiel:** Wir nehmen uns eine plan-konvexe Linse vor, deren erste Krümmung  $c_1 (= 1/r_1)$  gleich 0,01 ist (d. h.:  $r_1 = 100$  mm) und zweite Krümmung  $c_2 = 0$ . Die beiden Scheitelpunkte der Oberflächen liegen 10 auseinander (d = 10 mm), und der Brechungsindex des Glases ist gleich  $n = 1,5$ . Die Linse ist in Luft aufgestellt ( $n = 1$ ).

c	0,01	0
d	10	
n	1	1,5
-D	-0,005	0
σ	0	-0,0033333
h	1	0,9666667
n*σ	0	-0,005

Nun rechnen wir einen achsparallel mit einem Achsabstand von 1 mm einfallenden Strahl durch: Die Anfangswerte sind  $\sigma = 0$  und  $h = 1$ .

- Wenn  $\sigma = 0$ , dann ist auch  $n \cdot \sigma = 0$ .
- Nun können wir die Brechungsgleichung anwenden, um  $n' \cdot \sigma'$  zu bestimmen.
- Division durch den hier geltenden Wert von n liefert  $\sigma'$ .
- Mit der Transfergleichung bekommen wir h für die zweite Oberfläche.
- Die Brechungsgleichung liefert uns  $n' \cdot \sigma'$  für die zweite Oberfläche.
- Division durch den hier geltenden Wert von n liefert uns  $\sigma'$ .

## Technische Optik 09

9 von 30

Prof. Dr. Ulrich Sowada  
Institut für Mechatronik  
Fachhochschule Kiel

1 Lichtstrahlen	2 Lichtwellen	3 Linsen	4 Lichtmessung	5 Lichttechnik
3.1 Brechung	3.2 Paraxial	3.3 Meridional	3.4 Achromat	3.5 Zweilinsige Systeme

Wir sehen uns das Ergebnis an:

Im oberen Teil der Tabelle ist das optische System in Zahlen repräsentiert, im unteren ein Strahl mit Winkel  $\sigma$  und Achsabstand  $h$ .

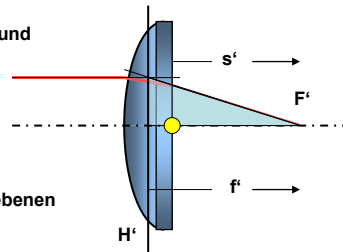
Aus den Parametern des Strahls können wir nun die interessierenden Größen für diese Linse berechnen.

c	0,01	0
d	10	
n	1	1,5
-D	-0,005	0
$\sigma$	0	-0,0033333
h	1	0,9666667
$n \cdot \sigma$	0	-0,005

Zwei rechtwinklige Dreiecke liefern uns Schnittweite  $s'$  und Brennweite  $f'$ :

$$s' = -\frac{h_2}{\sigma'} = 193,33 \quad f' = -\frac{h_1}{\sigma'} = 200$$

Diese beiden Größen erlauben zu bestimmen, wo die bildseitige Hauptebene  $H'$  liegt: 6,67 mm links von der ebenen Oberfläche im Inneren der Linse.



## Technische Optik 09

10 von 30

Prof. Dr. Ulrich Sowada  
Institut für Mechatronik  
Fachhochschule Kiel

1 Lichtstrahlen	2 Lichtwellen	3 Linsen	4 Lichtmessung	5 Lichttechnik
3.1 Brechung	3.2 Paraxial	3.3 Meridional	3.4 Achromat	3.5 Zweilinsige Systeme

**Beispiel:** Wir drehen die Linse um und lassen einen achsparallelen Strahl einfallen, dann können wir für die Linse die Lage der anderen Hauptebene bestimmen.

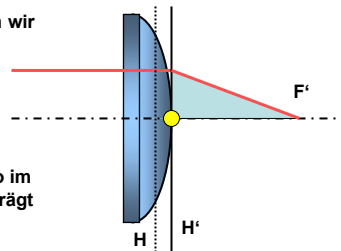
Aus den Parametern des Strahls berechnen wir nun die interessierenden Größen für diese Linsenform.

c	0	-0,01
d	10	
n	1	1,5
-D	0	-0,005
$\sigma$	0	0
h	1	1
$n \cdot \sigma$	0	0

Für die Schnittweite  $s'$  und die Brennweite  $f'$  bekommen wir nun:

$$s' = -\frac{h_2}{\sigma'} = 200 \quad f' = -\frac{h_1}{\sigma'} = 200$$

Beide sind gleich groß; die zweite Hauptebene liegt also im Scheitelpunkt der gekrümmten Fläche. Der „hiatus“ beträgt 3,33 mm (1/3 der Linsendicke).



## Technische Optik 09

11 von 30

Prof. Dr. Ulrich Sowada  
Institut für Mechatronik  
Fachhochschule Kiel

1 Lichtstrahlen	2 Lichtwellen	3 Linsen	4 Lichtmessung	5 Lichttechnik
3.1 Brechung	3.2 Paraxial	3.3 Meridional	3.4 Achromat	3.5 Zweilinsige Systeme

Wie geht es bei zwei Linsen im Abstand  $e$ ? Um diese Frage zu klären, wurde für verschiedene Abstände die Brennweite berechnet. Genommen wurden zwei gleichartige Linsen mit einem Krümmungsradius von 20 mm und einer Dicke von 1 mm bei einem Brechungsindex von 1,5.

Eine gute Näherungsformel für zwei nicht „dicht“ zusammengestellte Einzellinsen (Abstand  $e$ ) lautet:

$$D_{ges}' = D_1 + D_2 - e * D_1 * D_2$$

Für die Gesamt-Brennweite heißt das:

$$\frac{1}{f_{ges}'} = \left( \frac{1}{f_1'} + \frac{1}{f_2'} - \frac{e}{f_1' * f_2'} \right)$$

e	f'	f <sub>ges</sub> '
5	21,7	21,3
10	23,3	22,9
15	25,1	24,6
20	27,3	26,7
25	29,8	29,1

Die Brennweite der Einzellinse liegt bei 40 mm. „Dicht“ zusammengestellt sollten diese Linsen also doppelte Brechkraft haben (= halbe Brennweite); für  $e$  gegen Null sollte also eine Brennweite von  $f_{ges}' = 20$  mm herauskommen.

## Technische Optik 09

12 von 30

Prof. Dr. Ulrich Sowada  
Institut für Mechatronik  
Fachhochschule Kiel

1 Lichtstrahlen	2 Lichtwellen	3 Linsen	4 Lichtmessung	5 Lichttechnik
3.1 Brechung	3.2 Paraxial	3.3 Meridional	3.4 Achromat	3.5 Zweilinsige Systeme

Man kann diese Tabelle auch mit Symbolen (anstatt Zahlen) füllen und durchrechnen. Dann erhält man allgemeine Formeln für Schnittweite  $s'$  und Brennweite  $f'$ .

$$* = (c_1 - c_2)(1 - n) + dc_1c_2\left(1 - n\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

c	c <sub>1</sub>	c <sub>2</sub>
d		d
n	1	n
-D	-c <sub>1</sub> * (n-1)	-c <sub>2</sub> * (1-n)
σ	0	-c <sub>1</sub> * (n-1)/n
h	1	1 - c <sub>1</sub> * d * (n-1)/n
n*σ	0	-c <sub>1</sub> * (n-1)

Daraus können wir allgemeine Formeln für Schnittweite  $s'$  und Brennweite  $f'$  angeben:

$$s' = \frac{1 - d * c_1 * \left(1 - \frac{1}{n}\right)}{(c_1 - c_2)(n-1) + dc_1c_2\left(1 - n\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right)}$$

$$f' = \frac{1}{(c_1 - c_2)(n-1) + dc_1c_2\left(1 - n\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right)}$$

Für  $c_1 = 0$  sind beide Werte gleich.- Was heißt das?

Die Schnittweite  $s'$  wird vom Scheitelpunkt zum Brennpunkt  $F'$  gemessen und die Brennweite  $f'$  von der Hauptebene aus. Weil beide gleich sind, liegt bei einer plankonvexen Linse also die eine Hauptebene im Scheitelpunkt der gekrümmten Fläche.

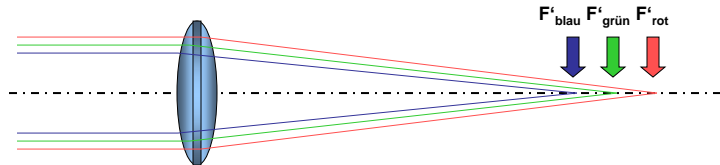
## Technische Optik 09

13 von 30

Prof. Dr. Ulrich Sowada  
Institut für Mechatronik  
Fachhochschule Kiel

1 Lichtstrahlen	2 Lichtwellen	3 Linsen	4 Lichtmessung	5 Lichttechnik
3.1 Brechung	3.2 Paraxial	3.3 Meridional	3.4 Achromat	3.5 Zweilinsige Systeme

Mit der Abhängigkeit der Brechzahl von der Wellenlänge des Lichts ist auch die Brennweite einer Linse für unterschiedliche Farbanteile verschieden groß.



Das Bild zeigt die longitudinale chromatische Aberration, d. h. entlang der optischen Achse liegen die Bilder des unendlich weit entfernten Objektpunktes für verschiedene Farben an verschiedenen Stellen; entsprechend unterscheiden sich die Brennweiten.

Weißes Licht ist aus Wellenlängen verschiedener Farben zusammengesetzt. Das Bild eines weißen Punktes fangen wir mit einem Schirm auf, der senkrecht zur optischen Achse aufgestellt ist.

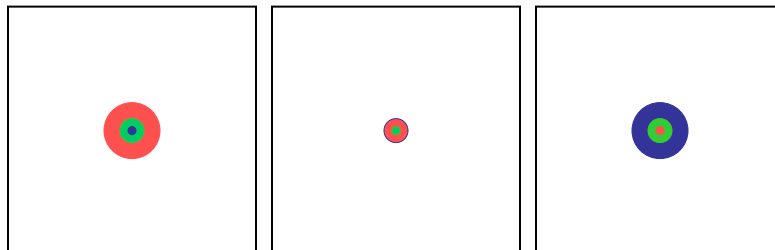
## Technische Optik 09

14 von 30

Prof. Dr. Ulrich Sowada  
Institut für Mechatronik  
Fachhochschule Kiel

1 Lichtstrahlen	2 Lichtwellen	3 Linsen	4 Lichtmessung	5 Lichttechnik
3.1 Brechung	3.2 Paraxial	3.3 Meridional	3.4 Achromat	3.5 Zweilinsige Systeme

Auf einem Schirm wird man an den Brennpunkten für die blauen, grünen und roten Farben folgende Bilder sehen (Objektpunkt ist auf der optischen Achse):



An der Position der Brennweite für die blauen Strahlen.

An der Position der Brennweite für die grünen Strahlen.

An der Position der Brennweite für die roten Strahlen.

Das nennt man „transversalen Farbfehler“ oder transversale chromatische Aberration.

Der Farbfehler tritt bei Verwendung einer Linse immer auf. Also untersuchen wir die Möglichkeiten, ihn durch Verwendung von zwei Linsen zu vermeiden.

## Technische Optik 09

15 von 30

Prof. Dr. Ulrich Sowada  
Institut für Mechatronik  
Fachhochschule Kiel

1 Lichtstrahlen	2 Lichtwellen	3 Linsen	4 Lichtmessung	5 Lichttechnik
3.1 Brechung	3.2 Paraxial	3.3 Meridional	3.4 Achromat	3.5 Zweilinsige Systeme

Für eine dünne Linse ( $d = 0$ ) bekommen wir für die Brechkraft  $D$ , das ist der Kehrwert der Brennweite  $f'$ :

$$D = \frac{1}{f'} = (c_1 - c_2) * (n - 1)$$

Diese Formel ist sehr praktisch; weil viele Glasmaterialien bei ungefähr  $n = 1,5$  liegen, lässt sich bei gegebenen Krümmungen  $c_1$  und  $c_2$ , besonders für eine plankonvexe Linse ( $c_2 = 0$ ) schnell ein ungefährender Wert angeben.

Beispiel:  $c_1 = 0,01$ ;  $c_2 = 0$ ;  $1/f' = 0,005$ ;  $f' = 200$ .

Wie stark hängt die Brechkraft  $D$  von der Wellenlänge  $\lambda$  ab? ( $n$  ist von  $\lambda$  abhängig)

$$D = (c_1 - c_2) * (n - 1) \quad \rightarrow \quad \frac{dD}{d\lambda} = (c_1 - c_2) * \frac{dn}{d\lambda}$$

Die Gleichung hat zwar mathematische Bedeutung, aber erst durch eine geschickte numerische Näherung bekommt sie praktischen Wert.

## Technische Optik 09

16 von 30

Prof. Dr. Ulrich Sowada  
Institut für Mechatronik  
Fachhochschule Kiel

1 Lichtstrahlen	2 Lichtwellen	3 Linsen	4 Lichtmessung	5 Lichttechnik
3.1 Brechung	3.2 Paraxial	3.3 Meridional	3.4 Achromat	3.5 Zweilinsige Systeme

Dieser Ausdruck lässt sich mit der Näherung  $-dn \approx n_F - n_C$  umwandeln:

$$\frac{dD}{d\lambda} = (c_1 - c_2) * \frac{dn}{d\lambda} \approx -(c_1 - c_2) * (n_d - 1) * \frac{n_F - n_C}{n_d - 1} * \frac{1}{d\lambda} = \frac{-D}{v_d} * \frac{1}{d\lambda}$$

Für den Kehrwert des markierten Bruchs hat Ernst Abbe (1840 - 1905) eine materialabhängige „Zahl“ eingeführt, die Abbesche Zahl. Sie wird berechnet durch:

$$v_d = \frac{n_d - 1}{n_F - n_C}$$

Dabei sind  $n_d$ ,  $n_F$  und  $n_C$  die Brechzahlen an bestimmten Wellenlängen, den Fraunhoferschen Linien. Dazu muss man wissen, dass vor 120 Jahren noch keine Möglichkeit bestand, die Wellenlängen präzise zu messen. Mit dieser Zahl kann man den Fehler  $\Delta f'$  sehr praktisch aus einer Materialkonstanten berechnen:

$$\Delta D = \frac{dD}{d\lambda} * \Delta \lambda = -\frac{D}{v_d}$$

Ernst Abbe, 1840 - 1905





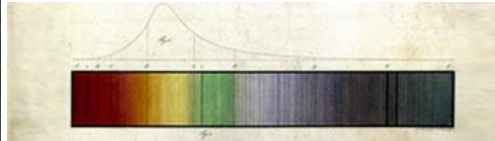
## Technische Optik 09

17 von 30

Prof. Dr. Ulrich Sowada  
Institut für Mechatronik  
Fachhochschule Kiel

1 Lichtstrahlen	2 Lichtwellen	3 Linsen	4 Lichtmessung	5 Lichttechnik
3.1 Brechung	3.2 Paraxial	3.3 Meridional	3.4 Achromat	3.5 Zweilinsige Systeme

Was bedeuten die Buchstaben d, F und C? Vor ca. 190 Jahren entdeckte Josef Fraunhofer (1787 - 1826) im Spektrum der Sonne an einigen Stellen dunkle Linien.



Dieses Bild des Spektrums des Sonnenlichts ist von Fraunhofer selbst gezeichnet worden (Quelle: Deutsches Museum, München).

Die Fraunhofer-Linien sind deutlich zu erkennen. Sie werden mit Buchstaben fortlaufend gekennzeichnet, beginnend links mit A, B, C, D.-

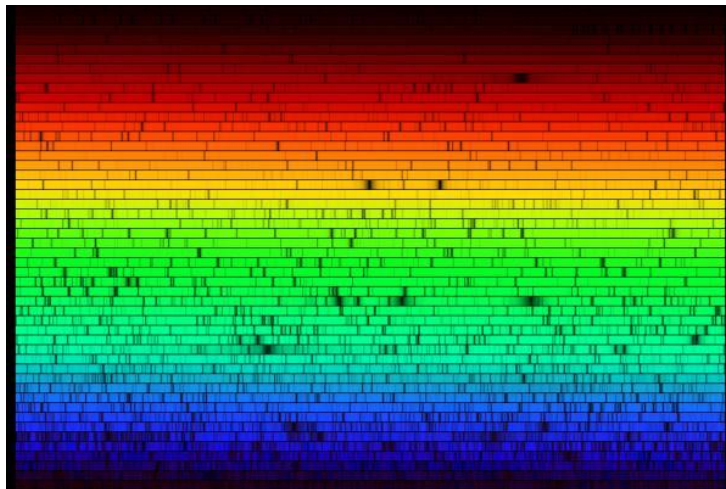
Die Identifikation der Ursache dieser Linien führte zu einem der heute wichtigsten optischen Messverfahren, der *Spektroskopie*.

## Technische Optik 09

18 von 30

Prof. Dr. Ulrich Sowada  
Institut für Mechatronik  
Fachhochschule Kiel

1 Lichtstrahlen	2 Lichtwellen	3 Linsen	4 Lichtmessung	5 Lichttechnik
3.1 Brechung	3.2 Paraxial	3.3 Meridional	3.4 Achromat	3.5 Zweilinsige Systeme



Die Position einer dunklen Linie im Spektrum identifiziert das verursachende Element, und ihre Helligkeitsreduktion erlaubt Rückschlüsse auf die Häufigkeit dieses Elements. Dieses Bild zeigt das Spektrum der Sonne mit den Fraunhoferlinien hoch aufgelöst.

## Technische Optik 09

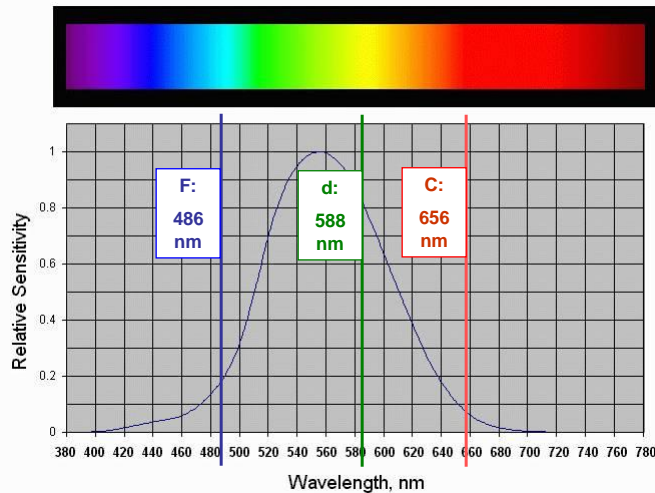
19 von 30

Prof. Dr. Ulrich Sowada  
Institut für Mechatronik  
Fachhochschule Kiel

1 Lichtstrahlen	2 Lichtwellen	3 Linsen	4 Lichtmessung	5 Lichttechnik
3.1 Brechung	3.2 Paraxial	3.3 Meridional	3.4 Achromat	3.5 Zweilinsige Systeme

Ernst Abbe wählte drei Wellenlängen aus, die im sichtbaren Bereich des Spektrums liegen und an denen im Spektrum der Sonne eine Fraunhofer-Linie gut zu erkennen ist:

- eine grüne (d),
- eine blaue (F) und
- eine rote (C).



Diese Wellenlängen liegen in der Mitte der Mitte sowie noch nicht ganz am kurzwelligen und am langwelligen Ende des sichtbaren Spektralbereichs.

## Technische Optik 09

20 von 30

Prof. Dr. Ulrich Sowada  
Institut für Mechatronik  
Fachhochschule Kiel

1 Lichtstrahlen	2 Lichtwellen	3 Linsen	4 Lichtmessung	5 Lichttechnik
3.1 Brechung	3.2 Paraxial	3.3 Meridional	3.4 Achromat	3.5 Zweilinsige Systeme

Die Firma Schott empfiehlt für ihre Gläser, für die Berechnung der Abhängigkeit der Brechzahl  $n(\lambda)$  folgenden Ausdruck zu benutzen (die Wellenlänge  $\lambda$  soll in der Einheit  $\mu\text{m}$  verwendet werden:  $1000 \text{ nm} = 1 \mu\text{m}$ ):

$$n(\lambda) = \sqrt{A_0 + A_1 * \lambda^2 + \frac{A_2}{\lambda^2} + \frac{A_3}{\lambda^4} + \frac{A_4}{\lambda^6} + \frac{A_5}{\lambda^8}}$$

Die Parameter  $A_0$  bis  $A_5$  sind im Glaskatalog (Schott: „Optisches Glas“) für jedes der angebotenen 250 Glasmaterialien tabellarisch angegeben.

	$A_0$	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$
BK 7	2,2718929	-1,0108077 * $10^{-2}$	1,0592509 * $10^{-2}$	2,0816965 * $10^{-4}$	-7,6472538 * $10^{-6}$	4,9240991 * $10^{-7}$
LF 5	2,4441760	-8,3059695 * $10^{-3}$	1,9000697 * $10^{-2}$	5,4129697 * $10^{-4}$	-4,1973115 * $10^{-6}$	2,3742897 * $10^{-7}$

## Technische Optik 09

21 von 30

Prof. Dr. Ulrich Sowada  
Institut für Mechatronik  
Fachhochschule Kiel

1 Lichtstrahlen	2 Lichtwellen	3 Linsen	4 Lichtmessung	5 Lichttechnik
3.1 Brechung	3.2 Paraxial	3.3 Meridional	3.4 Achromat	3.5 Zweilinsige Systeme

Nun können wir für jede Wellenlänge im sichtbaren Spektralbereich die Brechzahl berechnen. Es gilt die Abbesche Dispersionsregel:

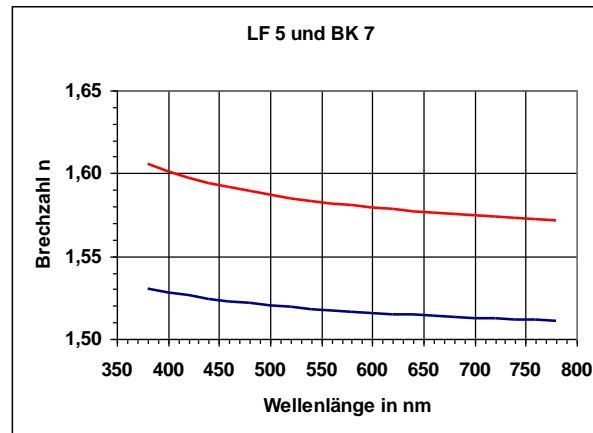
*Mit zunehmender Wellenlänge nimmt der Wert der Brechzahl ab.-*

Mathematisch geschrieben:

$$\frac{dn}{d\lambda} < 0$$

Gezeigt ist die Variation von  $n$  als Funktion von  $\lambda$  für den sichtbaren Wellenlängenbereich für die zwei Materialien:

**BK 7** und **LF 5**  
(Hersteller: Schott, Mainz).



## Technische Optik 09

22 von 30

Prof. Dr. Ulrich Sowada  
Institut für Mechatronik  
Fachhochschule Kiel

1 Lichtstrahlen	2 Lichtwellen	3 Linsen	4 Lichtmessung	5 Lichttechnik
3.1 Brechung	3.2 Paraxial	3.3 Meridional	3.4 Achromat	3.5 Zweilinsige Systeme

**Beispiel:** Wie groß ist der Wert der Abbeschen Zahl für BK 7 und für LF 5?

**Antwort:** Wir erinnern uns an die Definition für  $v_d$ :

$$v_d = \frac{n_d - 1}{n_F - n_C}$$

$n_d = n(588 \text{ nm}); n_F = n(486 \text{ nm}); n_C = n(656 \text{ nm}).$

	$n_d$	$n_F$	$n_C$
BK 7	1,51680	1,52237	1,51432
LF 5	1,58144	1,59146	1,57723

⇒  $v_d = 64,17$

⇒  $v_d = 40,85$

Die Abbesche Zahl wird mit einer Genauigkeit von vier signifikanten Stellen angegeben.

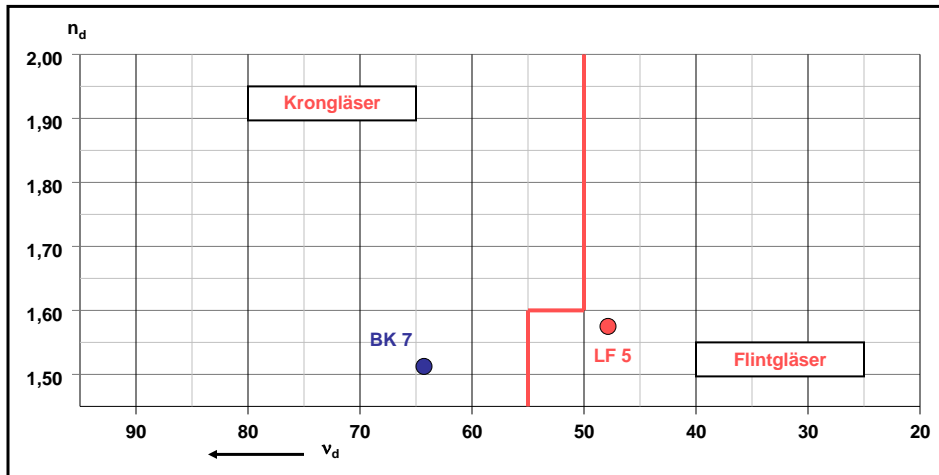
## Technische Optik 09

23 von 30

Prof. Dr. Ulrich Sowada  
Institut für Mechatronik  
Fachhochschule Kiel

1 Lichtstrahlen	2 Lichtwellen	3 Linsen	4 Lichtmessung	5 Lichttechnik
3.1 Brechung	3.2 Paraxial	3.3 Meridional	3.4 Achromat	3.5 Zweilinsige Systeme

Im **Abbe-Diagramm** sind die optischen Gläser nach den Werten ihrer Abbeschen Zahl  $v_d$  (nach links gerichtet) und ihres Brechungsindex  $n_d$  bei der Wellenlänge der Fraunhoferschen d-Linie aufgetragen. Jeder Punkt entspricht einem optischen Glas.



## Technische Optik 09

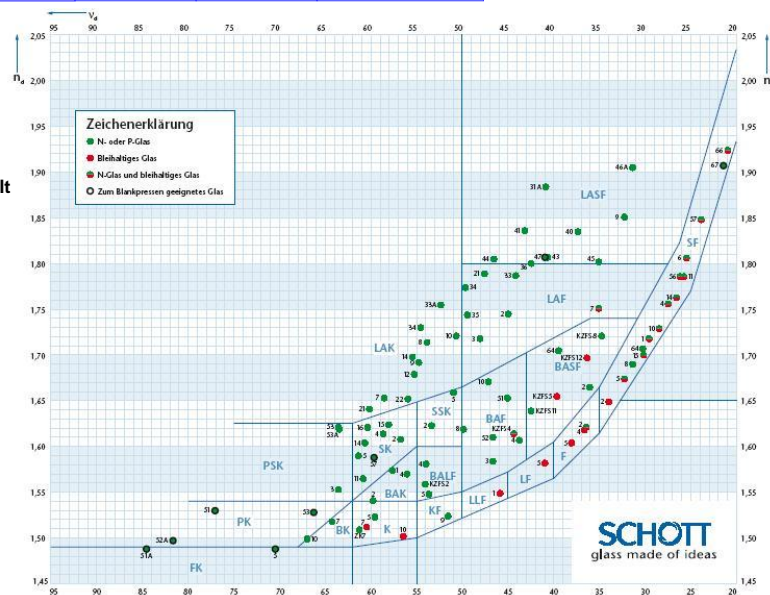
24 von 30

Prof. Dr. Ulrich Sowada  
Institut für Mechatronik  
Fachhochschule Kiel

1 Lichtstrahlen	2 Lichtwellen	3 Linsen	4 Lichtmessung	5 Lichttechnik
3.1 Brechung	3.2 Paraxial	3.3 Meridional	3.4 Achromat	3.5 Zweilinsige Systeme

Das Abbe-Diagramm des Glasherstellers Schott/Mainz stellt dem Optik-Designer die Parameter vieler optischer Gläser übersichtlich zur Auswahl.

Es gibt noch drei andere wichtige Lieferanten:  
Corning (USA),  
Hoya und Ohara (Japan).



## Technische Optik 09

25 von 30

Prof. Dr. Ulrich Sowada  
Institut für Mechatronik  
Fachhochschule Kiel

1 Lichtstrahlen	2 Lichtwellen	3 Linsen	4 Lichtmessung	5 Lichttechnik
3.1 Brechung	3.2 Paraxial	3.3 Meridional	3.4 Achromat	3.5 Zweilinsige Systeme

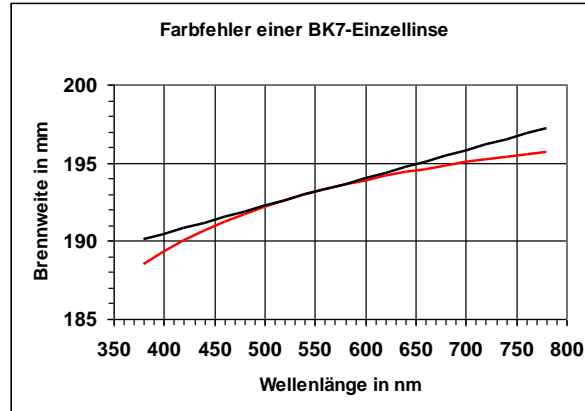
**Beispiel:** Wir nehmen eine dünne Linse mit  $c_1 = 0,01$  und  $c_2 = 0$  aus BK 7. Wie groß ist die Änderung der Brennweite mit der Wellenlänge?

**Antwort:** Wir berechnen die Werte für den Brechungsindex  $n(\lambda)$  mit der Schott-Formel und wenden für die Berechnung der Brennweite die Gleichung an:

$$\frac{1}{f'} = (c_1 - c_2) * (n(\lambda) - 1)$$

Das Ergebnis (rote Kurve) zeigt eine Zunahme der Brennweite über den sichtbaren Bereich der Wellenlängen von ungefähr 5 %. Das ist für scharfe Bilder ohne Farbsaum **nicht akzeptabel!**

Die schwarze Gerade gibt den Verlauf wider, der unter Benutzung der Abbeschen Zahl berechnet wird.



## Technische Optik 09

26 von 30

Prof. Dr. Ulrich Sowada  
Institut für Mechatronik  
Fachhochschule Kiel

1 Lichtstrahlen	2 Lichtwellen	3 Linsen	4 Lichtmessung	5 Lichttechnik
3.1 Brechung	3.2 Paraxial	3.3 Meridional	3.4 Achromat	3.5 Zweilinsige Systeme

**Beispiele:**

1.) Berechnen Sie in paraxialer Näherung mit der Tabellenmethode die Lage der beiden Hauptebenen für folgende Linse:

$$c_1 = 0,02; c_2 = -0,02; d = 5; n = 1,523.$$

Es handelt sich um eine symmetrisch-bikonvexe Linse. Daher muss nur eine Hauptebene berechnet werden; die andere liegt symmetrisch dazu.

c	0,02		-0,02
d			5
n	1	1,523	1
-D	-0,01046		-0,01046
$\sigma$	0	-0,006868	-0,02056
h	1		0,96566
$n^* \sigma$	0	-0,01046	-0,02056

Für Schnittweite  $s'$  und Brennweite  $f'$  erhalten wir:

$$s' = -\frac{h'}{\sigma'} = 46,968 \quad f' = -\frac{h}{\sigma'} = 48,638$$

Die Brennweite  $f'$  ist um 1,670 mm größer. Also liegt die bildseitige Hauptebene um diesen Betrag innerhalb der Linse (vom letzten Scheitelpunkt aus gemessen).

## Technische Optik 09

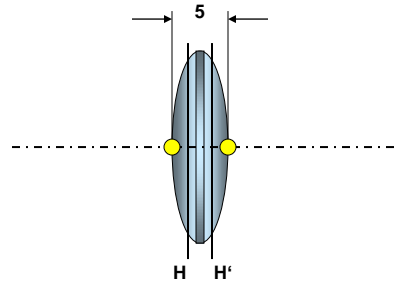
27 von 30

Prof. Dr. Ulrich Sowada  
Institut für Mechatronik  
Fachhochschule Kiel

1 Lichtstrahlen	2 Lichtwellen	3 Linsen	4 Lichtmessung	5 Lichttechnik
3.1 Brechung	3.2 Paraxial	3.3 Meridional	3.4 Achromat	3.5 Zweilinsige Systeme

Eine Skizze zeigt das Ergebnis:

Bei einer Dicke von 5 mm und einem Brechungsindex  $n = 1.5$  liegen die beiden Hauptebenen je 1.67 mm von den jeweiligen Scheitelpunkten entfernt. Der Hiatus beträgt  $5 - 2 \cdot 1.67 = 1.66$  mm, somit  $1/3$  der Linsen-Mittendicke (= Abstand zwischen den Scheitelpunkten, die gelb gezeichnet sind).



2.) Berechnen Sie in paraxialer Näherung die Lage der beiden Hauptebenen für eine plan-konvexe Linse:  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = -0.02$ ,  $n = 1.523$ ,  $d = 5$ .

Dafür lassen wir einen Strahl auf die Linse mit den gegebenen Parametern einfallen; zusätzlich berechnen wir Schnittweite und Brennweite für die umgedrehte Linse.

## Technische Optik 09

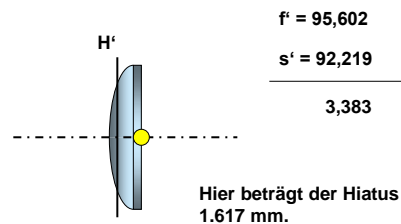
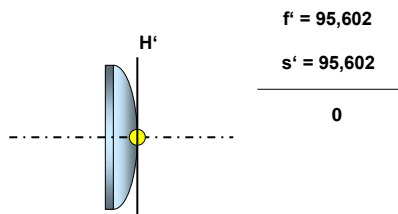
28 von 30

Prof. Dr. Ulrich Sowada  
Institut für Mechatronik  
Fachhochschule Kiel

1 Lichtstrahlen	2 Lichtwellen	3 Linsen	4 Lichtmessung	5 Lichttechnik
3.1 Brechung	3.2 Paraxial	3.3 Meridional	3.4 Achromat	3.5 Zweilinsige Systeme

c	0	-0,02
d	5	
n	1,523	1
-D	0	-0,01046
$\sigma$	0	-0,01046
h	1	1
$n \cdot \sigma$	0	-0,01046

c	0,02	0
d	5	
n	1,523	1
-D	-0,01046	0
$\sigma$	-0,006868	-0,01046
h	0,96566	
$n \cdot \sigma$	-0,01046	-0,01046



## Technische Optik 09

29 von 30

Prof. Dr. Ulrich Sowada  
Institut für Mechatronik  
Fachhochschule Kiel

1 Lichtstrahlen	2 Lichtwellen	3 Linsen	4 Lichtmessung	5 Lichttechnik
3.1 Brechung	3.2 Paraxial	3.3 Meridional	3.4 Achromat	3.5 Zweilinsige Systeme

Fassen wir zusammen: Es gibt für einen Objektpunkt keinen unendlich scharfen Bildpunkt.

Die Ursachen liegen entweder in der mit der Wellenlänge variierenden Größe der Brechzahl; das nennt man chromatische Aberration.

Oder die sphärische Form der Linsenoberflächen führt zu Unschärfen; davon gibt es fünf:

1 sphärische Aberration,

2 Astigmatismus,

3 Coma,

4 Bildfeldwölbung,

5 Verzeichnung.

Um die zu berechnen, ist eine genauere Strahldurchrechnung als die paraxiale notwendig.

## Technische Optik 09

30 von 30

Prof. Dr. Ulrich Sowada  
Institut für Mechatronik  
Fachhochschule Kiel

1 Lichtstrahlen	2 Lichtwellen	3 Linsen	4 Lichtmessung	5 Lichttechnik
3.1 Brechung	3.2 Paraxial	3.3 Meridional	3.4 Achromat	3.5 Zweilinsige Systeme

Ende Teil B